Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Koordinaten, Basenwechsel**
DR. ANTON MALEVICH, LEONARD BECHTEL, JULIAN MAAS

Aufgabe 1 (1)
Gegeben sei $v = \left(\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie bezüglich der folgenden o-Basen (eine o-Basis ist eine geordnete Basis) B_i von $\mathbb{R}^2$ die Koordinaten $\gamma_{B_i}(v)$ von v.

$$B_1 = \left[\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right], \quad B_2 = \left[\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right)\right], \quad B_3 = \left[\left(\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1\\-2\end{smallmatrix}\right)\right], \quad B_4 = \left[\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)\right].$$

Aufgabe 2 (1)
Wir betrachten $\mathbb{P}_{n\leq 2}$, den Vektorraum aller Polynomfunktionen maximal zweiten Grades. Sei $f \in \mathbb{P}_{n\leq 2}$ mit $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$. Berechnen Sie die Koordinaten $\gamma_{B_i}(f)$ von f bezüglich folgender o-Basen von $\mathbb{P}_{n\leq 2}$:

$$B_1 = \left[1, x, x^2\right], \quad B_2 = \left[2, x + x^2, 2x^2\right], \quad B_3 = \left[3x^2, 5x, -2\right], \quad B_4 = \left[6x + 2, 3x^2, x - 2\right].$$

Aufgabe 3 (2)
Gegeben sei die kanonische o-Basis des $\mathbb{R}^2$, $B_\epsilon = \left[\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right]$. Wir möchten Punkte im $\mathbb{R}^2$ nun nicht mehr bezüglich der B_ϵ darstellen, sondern bezüglich einer anderen Basis des $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie für die folgenden Basen B_i des $\mathbb{R}^2$ jeweils die Basiswechselmatrix $X_i := {}_{B_i}id_{B_\epsilon}$. Berechnen Sie weiterhin die Koordinaten von $v = \left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich B_i.

$$B_1 = \left[\left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right)\right], \quad B_2 = \left[\left(\begin{smallmatrix}0\\4\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\6\end{smallmatrix}\right)\right], \quad B_3 = \left[\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right)\right], \quad B_4 = \left[\left(\begin{smallmatrix}-2\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\right].$$

Aufgabe 4 (1)
Nun möchten wir Aufgabe 1 umkehren. Das heißt, wir möchten die Koordinaten bezüglich einer Basis B_i des $\mathbb{R}^2$ überführen in Punkte des $\mathbb{R}^2$, also in die Koordinaten bezüglich der kanonischen Basis B_ϵ. Hierzu greifen wir auf die vier Basen aus Aufgabe 1 zurück und berechnen $Y_i := X_i^{-1} = {}_{B_\epsilon}id_{B_i}$.

Tipp: Um Y_i auszurechnen, können Sie entweder die Matrix X_i invertieren oder zwei LGS lösen. Für die LGS stellen Sie einfach die beiden Koeffizientenmatrizen

$$\left(X_i \middle| \begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right) \text{ und } \left(X_i \middle| \begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right)$$

auf, lösen diese Systeme und erhalten die Koordinaten der beiden kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis B_i. Diese tragen Sie dann (in der richtigen Reihenfolge!) in eine Matrix ein und erhalten so Y_i.

Aufgabe 5 (1)
Bisher haben wir nur Basentransformationen zwischen der kanonischen Basis und einer beliebigen Basis des $\mathbb{R}^2$ betrachtet. Wir können aber auch Basentransformationen zwischen zwei beliebigen Basen des $\mathbb{R}^2$ durchführen. Berechnen Sie wieder bezüglich der Basen aus Aufgabe 1 die folgenden Transformationsmatrizen:

a) ${}_{B_2}id_{B_1}$
b) ${}_{B_3}id_{B_2}$
c) ${}_{B_2}id_{B_4}$
d) ${}_{B_4}id_{B_1}$

Tipp: Auch hier können Sie entweder ein LGS lösen oder aber überlegen, wie man die bereits aus Aufgabe 1 und Aufgabe 3 bekannten Matrizen benutzen kann, um die gesuchten Matrizen zu berechnen.